

Р.Р. Салимов (Институт математики НАН Украины),
Е.А. Севостьянов, А.А. Маркиш (Житомирский государственный университет имени И. Франко)

Р.Р. Салімов (Інститут математики НАН України),
Є.О. Севостьянов, А.О. Маркиш (Житомирський державний університет імені І. Франко)

R.R. Salimov (Institute of Mathematics of NAS of Ukraine),
E.A. Sevost'yanov, A.A. Markysh (Zhytomyr Ivan Franko State University)

Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений

Изучается поведение одного подкласса отображений с конечным искажением в окрестности начала координат. При определённых условиях на характеристику квазиконформности установлена оценка искажения расстояния снизу для таких отображений.

Про оцінку спотворення відстані знизу для одного класу відображень

Вивчається поведінка одного підкласу відображень зі скінченним спотворенням у околі початку координат. За певних умов на характеристику квазіконформності встановлено оцінку спотворення відстані знизу для таких відображень.

On lower estimate of distortion of a distance for one class of mappings

A behavior of one class of mappings with finite distortion at a neighborhood of the origin is investigated. There is proved a lower estimate of distortion of a distance under mappings mentioned above.

1. Введение. Основные определения и терминология могут быть найдены в монографиях [1], [2] и статье [3]. Отметим, что в сравнительной недавней статье первых двух авторов [4] установлена некоторая оценка искажения расстояния, доказанная в случае квазиконформных отображений К. Икома [5]. Некоторые близкие результаты по этому поводу могут быть найдены также в работах [6] и [7]. В частности, в последних двух работах речь идёт об отображениях с неограниченной характеристикой относительно p -модуля, где $n - 1 < p \leq n$, что шире обычно рассматриваемого «конформного» случая $p = n$. В данной заметке рассматривается несколько иной случай, когда $p > n$. Как будет показано ниже, в этой ситуации мы имеем дело с оценкой соответствующей величины снизу, что существенно отличается её от вышеупомянутого случая $n - 1 < p \leq n$. Причиной указанного отличия является иное поведение ёмкости при рассматриваемом ограничении её показателя (см. неравенство (8.8) в [8]). В случае ограниченной p -характеристики гомеоморфизмы упомянутого класса исследовались Ф. Герингом [9].

Напомним определения. Здесь и далее D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m – мера Лебега в \mathbb{R}^n , отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, предполагается непрерывным. Напомним, что семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, напр., в [10, разд. 1–6, гл. I]. Всюду далее

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\},$$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1), \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1),$$

Ω_n – объём единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n , а ω_{n-1} – площадь единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n . Для произвольных множеств $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ через $\Gamma(E, F, D)$ в дальнейшем обозначается семейство всевозможных кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих E и F в D (т.е., $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$). Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если $\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Пусть $p \geq 1$, тогда p – *модулем* семейства кривых Γ называется величина $M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^p(x) dm(x)$.

Пусть $x_0 \in D$, $r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – некоторая заданная измеримая по Лебегу функция. Обозначим через $S_i := S(x_0, r_i)$, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Предположим, что отображение f удовлетворяет для каждого $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$ условию

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x),$$

выполненному для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$, где $A = A(x_0, r_1, r_2)$ – сферическое кольцо с центром в точке x_0 радиусов r_1 и r_2 . Тогда будем говорить, что f является *кольцевым (p, Q) -отображением в точке $x_0 \in D$* . В настоящей работе нами устанавливается справедливость следующего результата.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$, $n < p < \infty$, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение и $f(0) = 0$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ – локально интегрируемая функция в \mathbb{B}^n , удовлетворяющая условию

$$Q_0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, \varepsilon)} Q(x) dm(x) > 0. \quad (1)$$

Тогда имеет место оценка:

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \geq c_0 Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n и p .

2. Вспомогательные результаты. Оценка верхнего предела одной функции.

Следуя работе [11, раздел 5], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором* в \mathbb{R}^n . Говорят также, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в D , то $f(E) := (f(A), f(C))$ также является конденсатором в $f(D)$.

Обозначим через $C_0(A)$ множество всех непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL . Также обозначим $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$. При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p E = \text{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^p dm(x)$$

называют p -ёмкостью конденсатора E . При $n < p < \infty$

$$\text{cap}_p E = \text{cap}_p (A, C) \geq n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{p-1} \left((m(A))^{\frac{p-n}{n(p-1)}} - (m(C))^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \right)^{1-p}, \quad (2)$$

где Ω_n – объем единичного шара в \mathbb{R}^n , см., напр., [8, неравенство (8.7)].

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Тогда положим

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{H}^{n-1},$$

где \mathcal{H}^{n-1} – $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Следующая лемма при $p \in (1, n]$ доказана в [4, лемма 1]. В случае произвольного $p > 1$ её доказательство дословно повторяет рассуждения, относящиеся к случаю $p \in (1, n]$, и потому опускается.

Лемма 1. Пусть $n \geq 2$, $p \geq 1$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение в точке

$x_0 \in D$ и E – конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)} \right)$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial D)$.
Полагаем

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \quad (3)$$

Тогда для конденсатора $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}) \right)$ выполнено соотношение

$$\text{cap}_p f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}. \quad (4)$$

Аналог следующей леммы доказан в [4, лемма 5].

Лемма 2. Пусть $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, – открытое отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$. Предположим, что существует функция $R : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, такая что

$$m(f(B(0, r))) \geq \Omega_n R^n(r). \quad (5)$$

Тогда

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \geq 1.$$

Доказательство. Полагаем $\max_{|x|=r} |f(x)| = L_f(r)$. Покажем, что

$$f(B(0, r)) \subset B(0, L_f(r)) \quad (6)$$

при каждом $r \in (0, 1)$. Для этого зафиксируем $r_0 \in (0, 1)$ и обозначим $M := \sup_{y \in f(B(0, r_0))} |y|$.

По определению точной верхней грани, найдётся последовательность $y_k \in f(B(0, r_0))$, $y_k \rightarrow M$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $y_k = f(x_k)$, $x_k \in B(0, r_0)$. Так как $\overline{B(0, r_0)}$ – компакт в \mathbb{B}^n , мы можем считать, что при некотором $x_0 \in \overline{B(0, r_0)}$ выполнено условие $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку f – непрерывное отображение в \mathbb{B}^n , то $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ при $k \rightarrow \infty$, так что $f(x_0) = y_0$. Таким образом, $y_0 \in f(\overline{B(0, r_0)})$. Значит,

$$M := \max_{y \in f(B(0, r_0))} |y| = |y_0|, \quad y_0 \in f(\overline{B(0, r_0)}). \quad (7)$$

Заметим, что в силу открытости отображения f случай $y_0 \in f(B(0, r_0))$ невозможен. В самом деле, если бы $y_0 \in f(B(0, r_0))$, то тогда y_0 входило бы во множество $f(B(0, r_0))$ вместе с некоторой своей окрестностью $B(y_0, \delta)$, кроме того, $y_0 \neq 0$ ввиду открытости отображения f . Представим y_0 в виде: $y_0 = |y_0| \cdot \frac{y_0}{|y_0|}$. Тогда вектор $\tilde{y}_0 := (|y_0| + \delta/2) \cdot \frac{y_0}{|y_0|}$ имеет модуль больший, чем y_0 и всё ещё лежит в $f(B(0, r_0))$. Однако, последнее противоречит определению y_0 . Полученное противоречие указывает на то, что $y_0 \notin f(B(0, r_0))$ и, значит, $y_0 \in \partial f(B(0, r_0))$. В частности, отсюда следует, что

$$|f(x)| < M \quad \forall x \in B(0, r_0). \quad (8)$$

Поскольку $y_0 \in \partial f(B(0, r_0))$, в силу открытости отображения f имеем: $y_0 \in f(S(0, r_0))$.

Итак, $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in S(0, r_0)$. В таком случае, ввиду соотношений (7) и (8) для всякого $x \in B(0, r_0)$ мы получим, что

$$|f(x)| < M = |y_0| = |f(x_0)| \leq \sup_{x \in S(0, r_0)} |f(x)| = L_f(r_0),$$

так что $f(x) \in B(0, L_f(r_0))$. Включение (6) установлено.

Из соотношения (6), учитывая условие $f(0) = 0$, имеем $\Omega_n L_f^n(r) \geq m(f(B(0, r)))$ и, следовательно,

$$L_f(r) \geq \left(\frac{m(f(B(0, r)))}{\Omega_n} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (9)$$

Таким образом, учитывая неравенства (5) и (9), получаем

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L_f(r)}{R(r)} \geq \limsup_{r \rightarrow 0} \left(\frac{m(f(B(0, r)))}{\Omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{R(r)} \geq 1.$$

Лемма 2 доказана. \square

3. Доказательство основного результата. *Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим кольцо $A = A(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$. Пусть E – конденсатор вида $E = (B(0, \varepsilon_2), \overline{B(0, \varepsilon_1)})$. Положим

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)},$$

где I – величина, определённая в (3). Согласно [12, лемма 2.2])

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int_A Q(x) \cdot \eta_0^p(|x - x_0|) dm(x) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (10)$$

для фиксированной измеримой функции $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $q_{x_0}(r) \neq \infty$ для п.в. $r > 0$, и любой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1$. Ввиду леммы 1 и соотношения (10) неравенство

$$\text{cap}_p f(E) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|) dm(x) \quad (11)$$

будет выполнено для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \eta(r) dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, & t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

удовлетворяет последнему условию $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \eta(r) dr \geq 1$, поэтому, согласно (11) мы получим, что

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, \varepsilon_2)), f(\overline{B(0, \varepsilon_1)}) \right) \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^p} \int_{A(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)} Q(x) dm(x).$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, 2\varepsilon)), f(\overline{B(0, \varepsilon)}) \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{A(0, \varepsilon, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x). \quad (12)$$

С другой стороны, в силу неравенства (2) при каждом фиксированном $\varepsilon > r > 0$ мы имеем оценку:

$$\begin{aligned} \text{cap}_p \left(f(B(0, 2\varepsilon)), f(\overline{B(0, \varepsilon)}) \right) &\geq \text{cap}_p \left(f(B(0, 2\varepsilon)), f(\overline{B(0, r)}) \right) \geq \\ &\geq n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{p-n}{p-1} \right)^{p-1} \left((m(f(B(0, 2\varepsilon))))^{\frac{p-n}{n(p-1)}} - (m(f(\overline{B(0, r)})))^{\frac{p-n}{n(p-1)}} \right)^{1-p}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) имеет место при любом $r \in (0, \varepsilon)$, поэтому можно перейти к пределу при $r \rightarrow 0$. В таком случае, мы получим:

$$\text{cap}_p \left(f(B(0, 2\varepsilon)), f(\overline{B(0, \varepsilon)}) \right) \geq c \cdot (m(f(B(0, 2\varepsilon))))^{\frac{n-p}{n}}, \quad (14)$$

где $c := n^{1/(1-p)} \Omega_n^{p/(n(1-p))} \cdot (p-1)/(p-n)$. Комбинируя (12) и (14), мы получаем, что

$$\frac{m(f(B(0, 2\varepsilon)))}{2\Omega_n \varepsilon^n} \geq c_1 \left(\frac{1}{2^n \Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{\frac{n}{n-p}}, \quad (15)$$

где c_1 - положительная постоянная зависящая только от n и p .

Положим $L_f(\varepsilon) = \max_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$. Используя соотношение (9), мы получим, что

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L_f(2\varepsilon)}{2\varepsilon} \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m(f(B(0, 2\varepsilon)))}{\Omega_n (2\varepsilon)^n} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Наконец, комбинируя (15) и (16), имеем:

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \geq c_0 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2^n \Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int_{B(0, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \right)^{\frac{1}{n-p}} = c_0 \cdot Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $c_0 > 0$ - некоторая постоянная, зависящая только от n и p . Теорема доказана. \square

Ещё одно утверждение может быть получено в случае, если $Q \in L_{loc}^\alpha(\mathbb{B}^n)$.

Теорема 2. Пусть $n \geq 2$, $n < p < \infty$, $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ - открытое дискретное кольцевое (p, Q) -отображение и $f(0) = 0$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$ - локально интегрируемая функция в \mathbb{B}^n в степени $\alpha > 1$. Пусть $K \subset \mathbb{B}^n$ - произвольный компакт, удовлетворяющий условию $0 \in \text{Int } K$. Тогда имеет место оценка:

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq C > 0,$$

где C - некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n , p , α и компакта K .

Доказательство. Выберем произвольным образом компакт $K \subset \mathbb{B}^n$, удовлетворяющий условию $0 \in \text{Int } K$. Поскольку $Q \in L_{loc}^\alpha(\mathbb{B}^n)$, найдётся постоянная $\overline{C} = \overline{C}(K) < \infty$ такая, что $\int_K Q^\alpha(x) dm(x) \leq \overline{C}(K)$. Повторяя теперь рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 1, мы вновь получаем соотношения (12) и (14). Кроме того, поскольку по выбору компакта K точка 0 является его внутренней точкой, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ кольцо $A(0, \varepsilon, 2\varepsilon)$ лежит в K .

Оценим теперь интеграл справа в (12) сверху, используя неравенство Гёльдера с показателями α и $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Учитывая сказанное выше, будем иметь:

$$\int_{A(0, \varepsilon, 2\varepsilon)} Q(x) dm(x) \leq \left(\int_K Q^\alpha(x) dm(x) \right)^{1/\alpha} \cdot (2\Omega_n^{1/n} \varepsilon)^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}} \leq C_1(K) \cdot \varepsilon^{\frac{n\alpha-n}{\alpha}},$$

где $C_1 = C_1(K)$ – некоторая новая постоянная, зависящая только от функции Q , компакта K , n и степени α . Применяя (12) и (14), мы будем иметь:

$$(m(f(B(0, 2\varepsilon)))^{1/n} \geq C_2 \cdot \varepsilon^{(\frac{n\alpha-n}{\alpha}-p) \cdot \frac{1}{n-p}} = C_2 \cdot \varepsilon^{\frac{n\alpha-n-\alpha p}{\alpha n-\alpha p}} = C_2 \cdot \varepsilon^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}, \quad (17)$$

где C_2 – некоторая положительная постоянная, зависящая только от функции Q , компакта K , n и степени α . Из (17) вытекает, что

$$\frac{(m(f(B(0, 2\varepsilon)))^{1/n}}{\varepsilon^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq C_2 > 0. \quad (18)$$

Полагая $L_f(\varepsilon) = \max_{|x|=\varepsilon} |f(x)|$ и используя соотношения (9) и (18), мы получим, что

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L_f(2\varepsilon)}{(2\varepsilon)^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(m(f(B(0, 2\varepsilon)))^{1/n}}{(2\varepsilon)^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}} \geq \\ &\geq C_2/2^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая $C := C_2/2^{1+\frac{n}{\alpha(p-n)}}$, получаем необходимое заключение. \square

Список литературы

- [1] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [2] *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – New York etc.: Springer, 2012.
- [3] *Севостьянов Е. А.* О некоторых свойствах обобщённых квазиизометрий с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. – 2011. – Т. **63**, № 3. – С. 385–398.
- [4] *Салимов Р. Р. и Севостьянов Е. А.* Аналоги леммы Икома-Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. матем. ж. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1368–1380.

- [5] *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175–203.
- [6] *Салимов Р.Р.* О кольцевых Q -отображениях относительно неконформного модуля // Дальневост. матем. журн. – 2014. – **14**, № 2. – С. 257–269.
- [7] *Салимов Р.Р. и Севостьянов Е.А.* О некоторых свойствах пространственных обобщенных квазиизометрий // Математические заметки, Математические заметки, 16 с. (принята к публикации).
- [8] *Maz'ya V.*, Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – **338**. – P. 307–340.
- [9] *Gehring F.* Lipschitz mappings and p -capacity of rings in n -space // Ann. of Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
- [10] *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [11] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [12] *Салимов Р.Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. матем. журн. – 2012. – **53**, № 4. – С. 920–930.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Руслан Радикович Салимов

Институт математики НАН Украины

ул. Терещенковская, д. 3

г. Киев-4, Украина, 01 601

тел. +38 095 630 85 92 (моб.), e-mail: ruslan623@yandex.ru

Евгений Александрович Севостьянов, Антонина Александровна Маркиш

Житомирский государственный университет им. И. Франко

ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru, tonya@bible.com.ua